Kartkówka 22.05.2018

Zadanie 1. Dane są obszary

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\right\} \quad \text{(wnętrze trójkąta)},$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1 - \frac{x}{\pi}\right\} \quad \text{(wnętrze innego trójkąta)},$$
$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \sin x\right\} \quad \text{(obszar pod sinusoidą)},$$

Znaleźć (opisać wzorem) dwa dyfeomorfizmy:

- jeden przekształcający obszar A na B,
- drugi przekształcający obszar B na C.

($A \to B$) Obszary A i B to trójkąty, o wierzchołkach odpowiednio

$$A:\ (0,0) - (0,1) - (1,0), \quad B:\ (0,0) - (0,1) - (\pi,0).$$

Aby znaleźć dyfeomorfizm, wystarczy dobrać współczynniki przekształcenia afinicznego

$$(x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f)$$

tak, by przeprowadzało wierzchołki A na wierzchołki B. Sprowadza się to do układu równań, który po rozwiązaniu daje

$$(x, y) \mapsto (\pi x, y).$$

Oczywiście można do tego dojść inaczej, np. dla każdego $y \in (0, 1)$ znaleźć dyfeomorfizm poziomego odcinka $(0, 1 - y)$ w A na poziomy odcinek $(0, \pi(1 - y))$ w B, a potem tę rodzinę przekształceń połączyć w jedno.

($B \to C$) Najwygodniej będzie przenieść pionowe odcinki w B na odpowiednie pionowe odcinki w C. Dla ustalonego $x \in (0, \pi)$ możemy przenieść odcinek $(0, 1 - \frac{x}{\pi})$ na $(0, \sin x)$ funkcją liniową

$$y \mapsto \frac{\sin x}{1 - \frac{x}{\pi}} \cdot y.$$

Połączenie tych przekształceń w jedno daje

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{\sin x}{1 - \frac{x}{\pi}} \cdot y\right).$$

Możliwości jest oczywiście nieskończenie wiele. Można np. przenosić poziome odcinki w B na odpowiednie poziome odcinki w C, choć jest to obliczeniowo trudniejsze. Odcinek $(0, \pi(1 - y))$ przenosimy na $(\arcsin y, \pi - \arcsin y)$ funkcją liniową

$$x \mapsto \frac{\pi - 2 \arcsin y}{\pi(1 - y)} \cdot x + \arcsin y,$$

a następnie łączymy w jedną całość:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{\pi - 2 \arcsin y}{\pi(1 - y)} \cdot x + \arcsin y, y\right).$$

Proszę zauważyć, że funkcja $\sin x$ nie jest odwracalna (bo nie jest różnowartościowa) i wartość y przyjmuje w dwóch punktach ($\arcsin y$ i $\pi - \arcsin y$).

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ klasy C^1, dla której $f(0,0,0) = 3$. Zakładając, że gradient $\nabla f(0,0,0)$ jest niezerowy, podać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni o równaniu $f(x,y,z) = 3$ w punkcie $(0,0,0)$ (jako współczynniki w równaniu mogą – a nawet muszą – pojawić się pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0,0,0)$).

Jak zmieniłoby się równanie, gdyby w miejsce $(0,0,0)$ wziąć punkt $(1,2,3)$?

Warto odnotować, że punkt $(0,0,0)$ rzeczywiście leży na powierzchni $f = 3$. Ponieważ gradient $\nabla f(0,0,0)$ jest niezerowy, więc płaszczyzna styczna jest wyznaczona przez podprzestrzeń liniową

$$\begin{aligned} L &= \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} \perp \nabla f(0,0,0)\right\} \\ &= \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{v}, \nabla f(0,0,0)\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) + v_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Badamy płaszczyznę styczną w punkcie $(0,0,0)$, a więc jest nią właśnie L.

Gdyby w każdym miejscu zastąpić punkt $(0,0,0)$ przez $(1,2,3)$, rozumowanie by się nie zmieniło (L pozostaje bez zmian), ale na koniec należałoby przesunąć płaszczyznę L tak, by przechodziła przez $(1,2,3)$ (bo a priori tak być nie musi). Robimy to przez podstawienie $\vec{w} = (1,2,3) + \vec{v}$ – płaszczyzną styczną jest

$$\begin{aligned} (1,2,3) + L &= \{(1,2,3) + \vec{v} : \vec{v} \in L\} \\ &= \left\{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \vec{w} - (1,2,3) \in L\right\} \\ &= \Bigg\{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : (w_1 - 1) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + \\ &\qquad + (w_2 - 2) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) + (w_3 - 3) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0\Bigg\}. \end{aligned}$$

Uwaga. Wartość 3 nie ma żadnego znaczenia dla rozumowania ani obliczeń. Można się o tym przekonać np. rozważając funkcję $g(x,y,z) = f(x,y,z) - 3$ i w ten sposób zmieniając wartość na 0.